31　指数・対数の種々の問題

267

(1)

$$16^{x+1}-2\times4^{x+3}-4^x+8=16\cdot16^x-2\cdot4^3\cdot4^x-4^x+8$$
$$=16\cdot\left(4^x\right)^2-129\cdot4^x+8$$
$$=\left(16\cdot4^x-1\right)\left(4^x-8\right)$$

より，$\left(16\cdot4^x-1\right)\left(4^x-8\right)=0$

よって，$4^x=\dfrac{1}{16},\ 8\quad\therefore x=-2,\ \dfrac{3}{2}$

(2)

$$\log_x4-\log_2x^4-7=\frac{\log_24}{\log_2x}-4\log_2x-7$$
$$=\frac{2-4(\log_2x)^2-7\log_2x}{\log_2x}$$
$$=-\frac{(\log_2x+2)(4\log_2x-1)}{\log_2x}$$

より，$\dfrac{(\log_2x+2)(4\log_2x-1)}{\log_2x}=0$　（$x\neq1$）

よって，$\log_2x=-2,\ \dfrac{1}{4}\quad\therefore x=\dfrac{1}{4},\ \sqrt[4]{2}$

268

(1)

解と係数の関係により，$3^x,\ 3^y$ は t の 2 次方程式 $t^2-12t+27=0$ の正の解である。

よって，$(t-3)(t-9)=0$ より，$\left(3^x,\ 3^y\right)=(3,\ 9),\ (9,\ 3)\quad\therefore(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(2)

$6^x=2^{x+y}$ より，$2^x3^x=2^x2^y\quad\therefore3^x=2^y$　・・・①

$16^{x+1}=3^{y-2}$ より，$2^4\cdot2^{4x}=\dfrac{3^y}{3^2}\quad\therefore2^4\cdot3^2\cdot2^{4x}=3^y$　・・・②

①より，$x\log_23=y$　・・・③

②より，$4+2\log_23+4x=y\log_23$　・・・④

③を④に代入すると，$4+2\log_23+4x=x(\log_23)^2$ より，

$x(\log_23+2)(\log_23-2)=2(\log_23+2)\quad\therefore x=\dfrac{2}{\log_23-2}$　・・・(答)

これを③に代入することにより，$y=\dfrac{2\log_23}{\log_23-2}$　・・・(答)

(3)

$\log_2 x - \log_2 y = 1$ より，$\log_2 \dfrac{x}{y} = 1 \quad \therefore x = 2y \quad$ ・・・①

これを $x\log_2 x - y\log_2 y$ に代入すると，

$$\begin{aligned}2y\log_2 2y - y\log_2 y &= 2y(1+\log_2 y) - y\log_2 y \\ &= y(2+\log_2 y)\end{aligned}$$

$x\log_2 x - y\log_2 y = 0$，$y>0$ より，$2+\log_2 y = 0 \quad \therefore y = \dfrac{1}{4}$ ・・・(答)

$y = \dfrac{1}{4}$ を①に代入することにより，$x = \dfrac{1}{2}$ ・・・(答)

269

(1)

$$\begin{aligned}2^{-2(3x+1)} - 5\times 2^{-3x} + 16 &= \frac{\left(2^{-3x}\right)^2}{4} - 5\times 2^{-3x} + 16 \\ &= \frac{1}{4}\left\{\left(2^{-3x}\right)^2 - 20\times 2^{-3x} + 64\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(2^{-3x}-4\right)\left(2^{-3x}-16\right)\end{aligned}$$

より，$\left(2^{-3x}-4\right)\left(2^{-3x}-16\right) < 0 \quad \therefore 4 < 2^{-3x} < 16$

底を 2 とする対数をとると，$2 < -3x < 4 \quad \therefore -\dfrac{4}{3} < x < -\dfrac{2}{3}$

(2)

底を a とする対数をとると，$0<a<1$ より，$x^2 < (x-2)\log_a 3 + 2x$

両辺を x について整理すると，$x^2 - (\log_a 3 + 2)x + 2\log_a 3 < 0$ より，$(x-\log_a 3)(x-2) < 0$

よって，$\log_a 3 < 0 < 2$ より，$\log_a 3 < x < 2$

(3)

真数条件より，$x+2>0$ かつ $3x+16>0$ 　すなわち $x>-2$ ・・・①

$\log_a(x+2) \geqq \dfrac{\log_a(3x+16)}{2}$ より，$\log_a(x+2)^2 \geqq \log_a(3x+16)$

よって，

$0<a<1$ のとき

$(x+2)^2 \leqq 3x+16$ より，$(x-3)(x+4) \leqq 0$

これと①より，$-2 < x \leqq 3$ ・・・(答)

$1<a$ のとき

$(x+2)^2 \geqq 3x+16$ より，$(x-3)(x+4) \geqq 0$

これと①より，$x \geqq 3$ ・・・(答)

(4)

$\log_4 x^2 - \log_x 64 - 1 \leq 0$ および $\log_4 x^2 - \log_x 64 - 1 = 2\log_4 x - \dfrac{3}{\log_4 x} - 1$ より，

$2\log_4 x - \dfrac{3}{\log_4 x} - 1 \leq 0$　・・・①

$0 < x < 1$ のとき

①の両辺に $\log_4 x$ を掛けると，$\log_4 x < 0$ より，$2(\log_4 x)^2 - \log_4 x - 3 \geq 0$

よって，$(\log_4 x + 1)(2\log_4 x - 3) \geq 0$ かつ $\log_4 x < 0$ より，$\log_4 x \leq -1$

$\therefore 0 < x \leq \dfrac{1}{4}$

$1 < x$ のとき

$(\log_4 x + 1)(2\log_4 x - 3) \leq 0$ かつ $\log_4 x > 0$ より，$0 < \log_4 x \leq 3$　$\therefore 1 < x \leq 8$

以上より，$0 < x \leq \dfrac{1}{4}$，$1 < x \leq 8$

270

$$\begin{aligned}4(4^x + 4^{-x}) - 20(2^x + 2^{-x}) + 97 &= 4\{(2^x + 2^{-x})^2 - 2\} - 20(2^x + 2^{-x}) + 97\\ &= 4(2^x + 2^{-x})^2 - 20(2^x + 2^{-x}) + 89\\ &= 4\left\{(2^x + 2^{-x})^2 - \frac{5}{2}\right\}^2 + 64\end{aligned}$$

また，相加平均≥相乗平均より，$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$

よって，$4(4^x + 4^{-x}) - 20(2^x + 2^{-x}) + 97$ は $2^x + 2^{-x} = \dfrac{5}{2}$ で最小値 64 をとる。

このときの x の値を求めると，

$2^x + 2^{-x} - \dfrac{5}{2} = 2^{-x-1}\left\{2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2\right\} = 2^{-x-1}(2^x - 2)(2 \cdot 2^x - 1) = 0$ より，$2^x = 2, \dfrac{1}{2}$

これと $x \geq 0$ より，$x = 1$

よって，$f(x) = \log_2\{4(4^x + 4^{-x}) - 20(2^x + 2^{-x}) + 97\}$ は $x = 1$ で最小値 $f(1) = \log_2 64 = 6$ をとる。

271

$9^x - a\cdot 3^{x+1} + a + 1 = (3^x)^2 - 3a\cdot 3^x + a + 1$ より，$(3^x)^2 - 3a\cdot 3^x + a + 1 = 0$

$3^x = t$ とおくと，$t^2 - 3at + a + 1 = 0$

条件より，この方程式は $t > 0$ を満たす異なる 2 実数解をもつ。

したがって，

判別式を D とすると，$D = 9a^2 - 4a - 4 > 0$ より，$a < \dfrac{2-2\sqrt{10}}{9},\ \dfrac{2+2\sqrt{10}}{9} < a$　・・・①

解を α, β とすると，$\alpha - 1 > 0,\ \beta - 1 > 0$ および解と係数の関係より，

$(\alpha - 1) + (\beta - 1) = \alpha + \beta - 2 = 3a - 2 > 0$　$\therefore a > \dfrac{2}{3}$　・・・②

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = a + 1 - 3a + 1 = -2a + 2 > 0$　$\therefore a < 1$　・・・③

①かつ②かつ③より，$\dfrac{2+2\sqrt{10}}{9} < a < 1$

例題 31

別解

真数は正で，底は 1 でない正数だから，$x > 0\ (x \neq 1)$，$y > 0\ (y \neq 1)$

$\log_x y + 2\log_x y < 3$ より，$\log_x y + 2\log_x y - 3 < 0$

また，

$$\begin{aligned}\log_x y + 2\log_x y - 3 &= \log_x y + 2\cdot\frac{1}{\log_x y} - 3\\ &= \frac{(\log_x y)^2 - 3\log_x y + 2}{\log_x y}\\ &= \frac{(\log_2 y - 1)(\log_2 y - 2)}{\log_x y}\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{(\log_2 y - 1)(\log_2 y - 2)}{\log_x y} < 0$

すなわち $\begin{cases}\log_x y < 0\\ (\log_x y - 1)(\log_x y - 2) > 0\end{cases}$　または　$\begin{cases}\log_x y > 0\\ (\log_x y - 1)(\log_x y - 2) < 0\end{cases}$

それぞれの連立不等式を解くことにより，$\log_x y < 0$　または　$1 < \log_x y < 2$

よって，

$0 < x < 1$ のとき　$y > 1$　または　$x^2 < y < x$

$1 < x$ のとき　$0 < y < 1$　または　$x < y < x^2$

272

真数は正で，底は 1 でない正数だから， $x>0\ (x\neq 1)$， $y>0\ (y\neq 1)$

与式より， $4(\log_2 x-\log_2 y)-\log_x 2+(\log_2 y)(\log_x y)>0$

また，

$$\begin{aligned}4(\log_2 x-\log_2 y)-\log_x 2+(\log_2 y)(\log_x y)&=4\log_2 x-4\log_2 y-\frac{1}{\log_2 x}+\log_2 y\cdot\frac{\log_2 y}{\log_2 x}\\&=\frac{4(\log_2 x)^2-4(\log_2 y)(\log_2 x)+(\log_2 y)^2-1}{\log_2 x}\\&=\frac{(\log_2 y-2\log_2 x)^2-1}{\log_2 x}\\&=\frac{(\log_2 y-2\log_2 x+1)(\log_2 y-2\log_2 x-1)}{\log_2 x}\\&=\frac{\left(\log_2\frac{y}{x^2}+1\right)\left(\log_2\frac{y}{x^2}-1\right)}{\log_2 x}\end{aligned}$$

よって， $\dfrac{\left(\log_2\frac{y}{x^2}+1\right)\left(\log_2\frac{y}{x^2}-1\right)}{\log_2 x}>0$

すなわち $\begin{cases}\log_2 x<0\\ \left(\log_2\frac{y}{x^2}+1\right)\left(\log_2\frac{y}{x^2}-1\right)<0\end{cases}$ または $\begin{cases}\log_2 x>0\\ \left(\log_2\frac{y}{x^2}+1\right)\left(\log_2\frac{y}{x^2}-1\right)>0\end{cases}$

$\begin{cases}\log_2 x<0\\ \left(\log_2\frac{y}{x^2}+1\right)\left(\log_2\frac{y}{x^2}-1\right)<0\end{cases}$ を解くと，

$0<x<1$ かつ $\dfrac{1}{2}<\dfrac{y}{x^2}<2$ すなわち $0<x<1$ かつ $\dfrac{1}{2}x^2<y<2x^2$

$\begin{cases}\log_2 x>0\\ \left(\log_2\frac{y}{x^2}+1\right)\left(\log_2\frac{y}{x^2}-1\right)>0\end{cases}$ を解くと， $1<x$ かつ $y<\dfrac{1}{2}x^2$ または $y>2x^2$

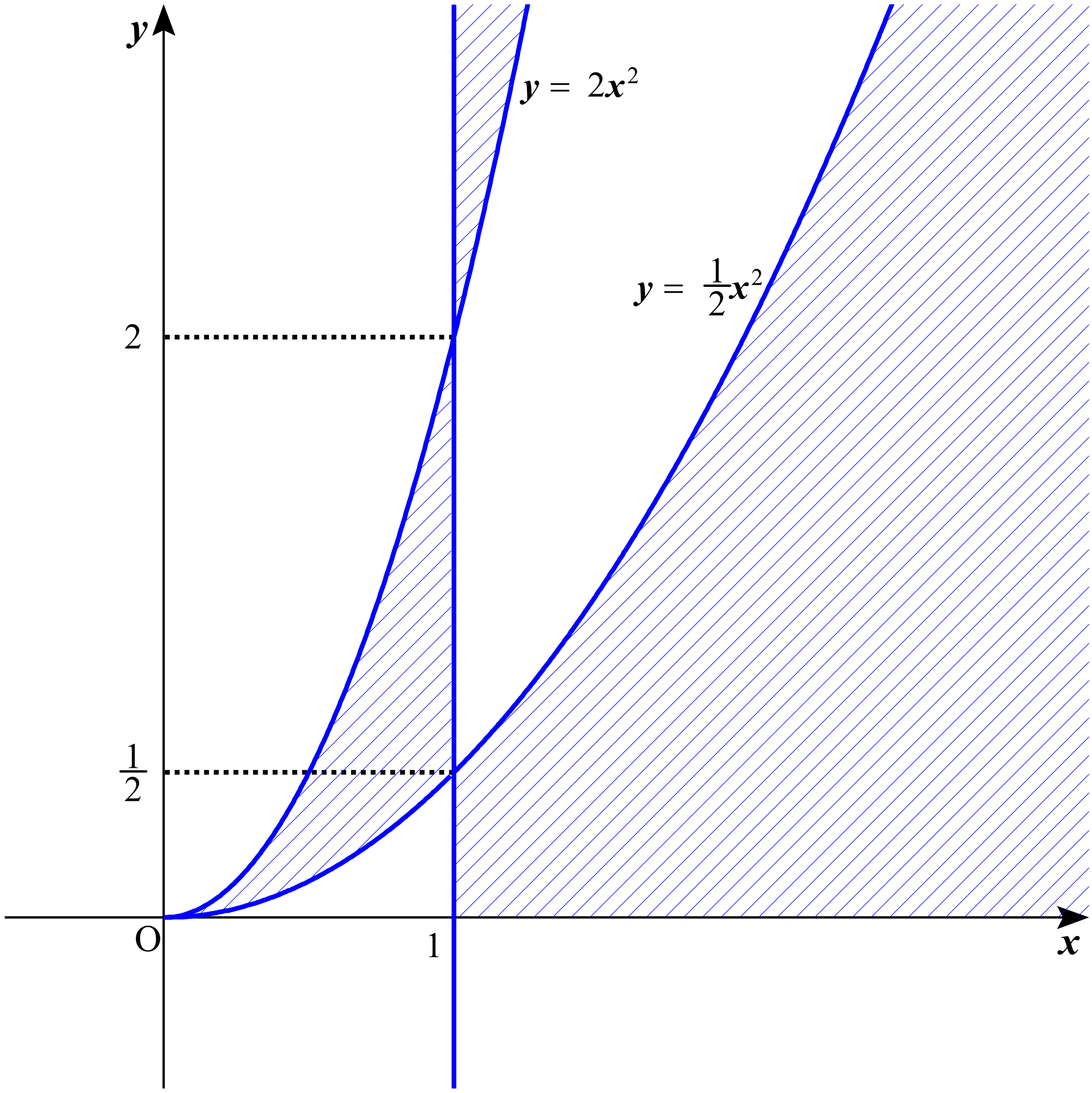
よって，

$0<x<1$ のとき $\dfrac{1}{2}x^2<y<2x^2$，

$1<x$ のとき $y<\dfrac{1}{2}x^2$ または $y>2x^2$

これを図示すると次図のようになる。

ただし，境界線を含まない。



y
x
O
1
2
$\frac{1}{2}$
$y = 2x^2$
$y = \frac{1}{2}x^2$

273

真数条件より，$x>0$，$ax>0$　すなわち　$x>0$，$a>0$

$$\left\{\log_{\frac{1}{10}}(ax)\right\}^2+\log_{\frac{1}{10}}x+\frac{1}{4}=\{-\log_{10}(ax)\}^2-\log_{10}x+\frac{1}{4}$$

$$=(\log_{10}x+\log_{10}a)^2-\log_{10}x+\frac{1}{4}$$

$$=(\log_{10}x)^2+(2\log_{10}a-1)\log_{10}x+(\log_{10}a)^2+\frac{1}{4}$$

より，

$$(\log_{10}x)^2+(2\log_{10}a-1)\log_{10}x+(\log_{10}a)^2+\frac{1}{4}=0 \quad ・・・①$$

補足：底を 10 にしたのは$\frac{1}{10}$より 10 と書く方が楽だから

$\log_{10}x=X,\ \log_{10}a=A$ とおくと，$X^2+(2A-1)X+A^2+\frac{1}{4}=0$　・・・②

②の判別式を D とすると，実数解条件より，$D\geqq 0$

これと，$D=(2A-1)^2-4\left(A^2+\frac{1}{4}\right)=-4A$ より，$-4A\geqq 0$　$\therefore A\leqq 0$　・・・③

①が $\sqrt{10}$ より大きい解をもつとき，$\log_{10}\sqrt{10}=\frac{1}{2}$ より，②は$\frac{1}{2}$より大きい解をもつ。

よって，②の解を $\alpha,\ \beta$ とおくと，

$\alpha-\frac{1}{2}>0,\ \beta-\frac{1}{2}>0$ より，$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\left(\beta-\frac{1}{2}\right)>0$ かつ $\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\beta-\frac{1}{2}\right)>0$

また，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-2A+1$，$\alpha\beta=A^2+\frac{1}{4}$

よって，

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)+\left(\beta-\frac{1}{2}\right)=-2A>0 \quad \therefore A<0 \quad ・・・④$$

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\beta-\frac{1}{2}\right)=A^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(-2A+1)+\frac{1}{4}=A(A+1)>0 \quad \therefore A<-1 \text{ または } A>0 \quad ・・・⑤$$

③かつ④かつ⑤より，$A<-1$　すなわち　$\log_{10}a<-1$　$\therefore 0<a<\frac{1}{10}$

274

n 年後の人口

$$10^8\cdot\left(1-\frac{2}{100}\right)^5\left(1-\frac{1}{100}\right)^{n-5}=10^8\cdot\left(\frac{98}{100}\right)^5\left(\frac{99}{100}\right)^{n-5}$$
$$=10^8\cdot\frac{98^5}{10^{10}}\cdot\frac{10^{10}}{99^5}\cdot\left(\frac{99}{100}\right)^n$$
$$=10^8\cdot\left(\frac{98}{99}\right)^5\left(\frac{99}{100}\right)^n$$

よって，$10^8\cdot\left(\frac{98}{99}\right)^5\left(\frac{99}{100}\right)^n<6\cdot10^7$ より，$\left(\frac{100}{99}\right)^n>\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{98}{99}\right)^5=\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{99}{98}\right)^{-5}$

常用対数をとると，$n(2-\log_{10}99)>\log_{10}5-\log_{10}3-5(\log_{10}99-98)$

これに

$\log_{10}99=\log_{10}(3^2\cdot11)=2\log_{10}3+\log_{10}11=1.9956$

$\log_{10}98=\log_{10}(7^2\cdot2)=2\log_{10}7+\log_{10}2=1.9912$

$\log_{10}5=0.6990$，$\log_{10}3=0.4771$

を代入し，各辺の計算をすると，$0.0044n>0.1999\quad\therefore n>45.4$

ゆえに，46 年後

275

(1)

$p\alpha>1$，$p\alpha=p\log_{1000}2=p\cdot\frac{\log_{10}2}{\log_{10}1000}=\frac{\log_{10}2^p}{\log_{10}1000}>1$ より，$2^p>1000$

これと，$2^9<1000<2^{10}$ より，$p\alpha>1$ となるような最小の整数 p は 10

(2)

$p\alpha-1>\frac{1}{p}$ すなわち $10\log_{1000}2-1<\frac{1}{10}$ を示す。

$$10\log_{1000}2-1<\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{10\log_{10}2}{3}-1<\frac{1}{10}$$
$$\Leftrightarrow\frac{10\log_{10}2}{3}<\frac{11}{10}$$
$$\Leftrightarrow100\log_{10}2<33$$
$$\Leftrightarrow\log_{10}2^{100}<\log_{10}10^{33}$$
$$\Leftrightarrow2^{100}<10^{33}$$
$$\Leftrightarrow\frac{2^{100}}{10^{33}}<1$$

ここで，$\frac{2^{100}}{10^{33}}=2\cdot\left(\frac{8}{10}\right)^{33}=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{33}<2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{512}{625}<1$

よって，$10\log_{1000}2-1<\dfrac{1}{10}$　すなわち $p\alpha-1<\dfrac{1}{p}$

また，$p\alpha-1=10\log_{1000}2-1=\log_{1000}2^{10}-\log_{1000}1000=\log_{1000}1024-\log_{1000}1000>0$ より，$p\alpha-1>0$

ゆえに，$0<p\alpha-1<\dfrac{1}{p}$

(3)

(2)より，$0<p\alpha-1<\dfrac{1}{p}$　すなわち　$0<10\log_{1000}2-1<\dfrac{1}{10}$

よって，$\dfrac{1}{10}<\dfrac{\log_{10}2}{3}<\dfrac{11}{10}$

ゆえに，$0.3<\log_{10}2<0.33$